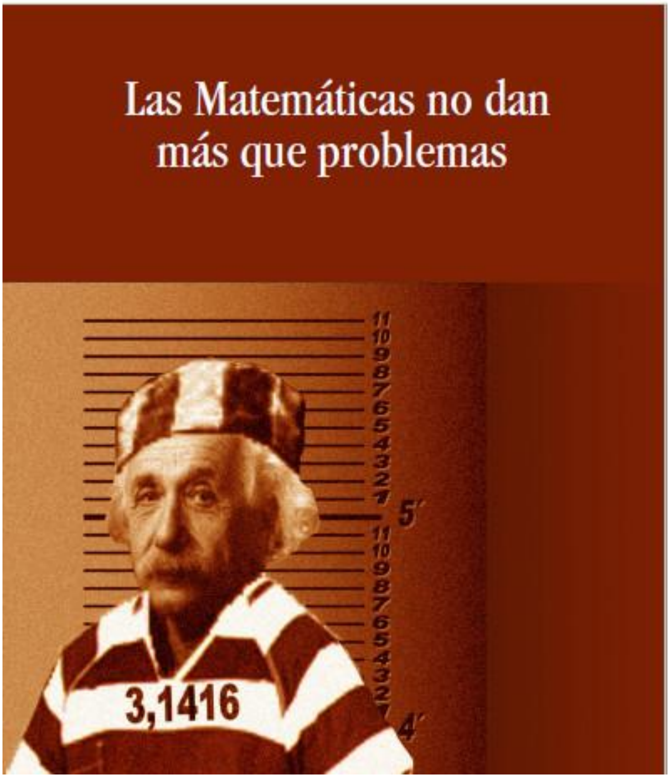


Publicado originalmente en 2007 en la colección Espejo Lúdico.

Juan Luis Roldán http://juanlroldan.net

Ilustración de portada: Antonio J. Roldán Calzado

Versión abril 2022.

NOTA DE 2022

Autoeditamos *Las Matemáticas no dan más que problemas* hace ya quince años, en 2007, al amparo del blog Espejo Lúdico. El libro tuvo una gran acogida con miles de descargas gratuitas y referencias en muchas páginas importantes de matemáticas e ingenio como Gaussianos, Juegos de Ingenio, Microsiervos o Divulgamat. También se podían adquirir (ya no) copias impresas desde Lulu.com por lo que todavía circulan por ahí algunas de segunda mano (además de en formato pdf en diversas páginas, la mayoría sin permiso, como suele ocurrir).

El libro pretende ser una especie de manual de resolución de problemas de ingenio, fruto de años de presentárselos a alumnos de secundaria y resolverlos con ellos, por lo que se eligieron cuarenta retos que habitualmente daban juego y se abordaba la forma de solucionarlos.

Con esta edición digital aseguramos el acceso a la obra y esperamos que sea motivo de disfrute para el nuevo lector.

Juan Luis Roldán

A aquellos alumnos del Taller de Matemáticas del **IES Federico García Lorca de Las Matas** (Madrid), que, a base de repetir cursos, participaron cinco años seguidos en la asignatura y, además de convertirse en mis mejores alumnos, me obligaron a mejorar mi repertorio de problemas.

INTRODUCCIÓN

De qué va este libro

Si siempre has identificado las Matemáticas con aquello de que "es tan claro como que dos y dos son cuatro", ¡ten cuidado!, porque, cuando leas este libro comprenderás que, bueno, sí, dos y dos *pueden ser* cuatro, pero depende de a *qué dos* y de a *qué cuatro* nos estemos refiriendo.

Te esperan cuarenta problemas diferentes, diferentes entre sí y diferentes muchos de ellos a lo que probablemente estés acostumbrado (y, quizá en algunos casos a lo que consideras Matemáticas). Es cierto, aparecerán números y habrá que hacer operaciones, pero en la inmensa mayoría de los casos, no harán falta más que las cuatro reglas básicas (y eso sí, grandes dosis de imaginación).

El objetivo de este libro no es que te conviertas en un *problemero* (alguien que conoce una gran cantidad de acertijos matemáticos) sino en un *problemista* (un experto en problemas que posea las armas necesarias para enfrentarse a nuevos retos).

Dicho de otra manera, si nunca te han gustado mucho las Matemáticas, quizá a partir de este libro quieras darles una nueva oportunidad. Si siempre te han gustado, abróchate el cinturón, que comienza el viaje.

Cómo funciona este libro

Cada problema de este libro se identifica con un número diferente ya que, para todos ellos incluimos al final del libro su *solución*, tan detallada y "poco milagrosa" como hemos podido, y su *indicación*, que es una pista que, si estás atascado o no sabes por dónde empezar, te puede servir de ayuda. Para poder tenerlas a mano, las indicaciones se presentan al final de cada capítulo.

A continuación hay un adelanto, que hemos titulado “Menús de degustación” en los que se proponen, de un tirón, los primeros veintiún problemas del libro, eso sí, agrupados en tres diferentes menús:

- **Menú picante**: lleno de problemas aliñados con cierto “picante”, con algún detalle diferente que lo aleja de los sabores tradicionales
- **Menú de comida rápida**: problemas breves pero, como un buen canapé o una fina tapa, con estilo y sabor concentrado en un pequeño bocado que, a pesar de todo, no siempre será fácil de digerir.
- **Menú para degustar con calma**: el de los grandes platos, el que no merece la pena comerse de pie en la barra, sino sentado sin prisa a una buena mesa

El motivo de proponer estos problemas de degustación es que en la **primera parte** vamos a resolverlos todos. Esta primera parte es, de alguna manera, la de entrenamiento, la que hará de ti un (o una) gran *problemista.*

¿Y cómo aprender a enfrentarse a los problemas? Estudiando cómo otros se enfrentan a ellos. Agruparemos los problemas, no tanto en función de sus características, sino en apartados que recogen los distintos perfiles de las personas que se enfrentan a acertijos matemáticos: apresurados, hiperrealistas, calculistas... Estudiaremos su forma de trabajar y eso nos servirá, junto con alguna otra estrategia, para fogarnos en nuestra recién estrenada carrera de problemistas.

En la **segunda parte,** que hemos titulado *Parque Problematemático* (término que el lector avisado enseguida descubrirá que esconde tres palabras distintas), los problemas sí están agrupados por temática. Además las soluciones no aparecen hasta el final del libro, por lo que es una buena manera de probarse tras el entrenamiento de la primera parte.

En cualquier caso, el libro está pensado para que cada uno lo aborde como quiera. Uno puede limitarse a leer y trabajar la colección de problemas (saltándose el seguro que a veces tedioso texto) aprovechando las soluciones e indicaciones. También, aunque el libro esté escrito en el orden que estás viendo, puede iniciarse su lectura por la segunda parte, para, con la experiencia que esta seguro otorga, abordar después los problemas de la primera.

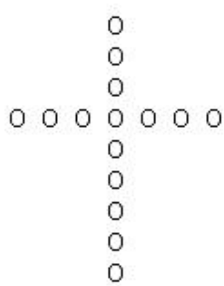
MENÚS DE DEGUSTACIÓN

Menú picante

Primeros

Problema 1: *Supongamos que existe un microorganismo que se reproduce cada segundo en otros dos microorganismos idénticos que se reproducen de igual modo y, al introducirlo en una probeta, tarda una hora en llenarla completamente. ¿En qué momento ya habrá llenado la mitad de la probeta?*

Problema 2: *Una anciana ciega entrega a un joyero una cruz de quince perlas como la de la figura para que la repare, y le advierte que no se le ocurra engañarla quitando alguna perla, ya que ella sabe que, contando desde el extremo de cualquiera de los brazos de la cruz hasta la parte inferior, hay nueve perlas. Sin embargo el joyero se las arregla para quitarle dos perlas sin que ella se de cuenta del cambio. ¿Cómo?*



Segundos

Problema 3: *Dos ciclistas situados en localidades diferentes circulan uno en busca del otro a una velocidad de 20 km/h. Cuando les queda una hora para encontrarse, una mosca que vuela a 40 km/h parte del primer ciclista en busca del segundo, cuando lo alcanza da media vuelta en busca del primero y así sucesivamente hasta que los ciclistas se encuentran . ¿Qué distancia recorre en total la mosca?*

Problema 4: *Pensé que mi despertador se estaba volviendo loco. Primero marcó las 9 menos 5 y un minuto después las nueve menos 4. Dos minutos después marcó otra vez las 9 menos 4 y un minuto después de nuevo las 9 menos 5. Hasta que a las 9 en punto descubrí qué le pasaba. ¿Qué le pasaba?.*

Postres

Problema 5: *¿Cómo se pueden formar cuatro triángulos iguales con sólo seis cerillas?*

Problema 6: *Cinco por cuatro veinte más uno veintidós. Y además el cálculo es correcto. ¿Por qué?*

Menú de comida rápida

Primeros

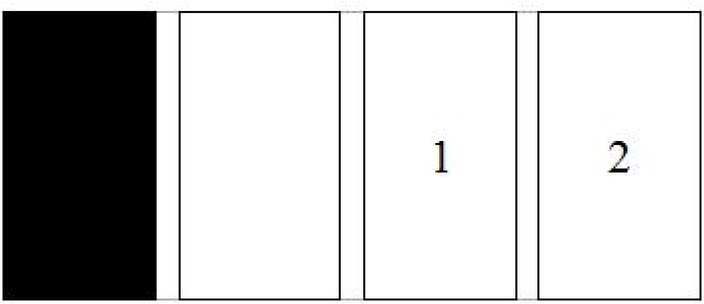
***Problema 7**: Si una botella con tapón cuesta 11 € y la botella cuesta 10 € más que el tapón, ¿cuánto cuesta la botella?*

***Problema 8**: Un anfitrión quiere cortar un bizcocho de forma circular en ocho partes iguales. Su hija dice que basta con tres cortes rectos. ¿Es posible? ¿Cómo?*

***Problema 9**: ¿Cómo podemos transformar un hexágono en un poliedro añadiéndole sólo tres segmentos?*

Segundos

***Problema 10**: Hemos colocado cuatro cartas sobre la mesa. En cada hay escrita un 1 ó un 2 y el reverso es de color blanco o negro ¿Cuántas cartas y cuáles de ellas debemos dar la vuelta para averiguar si cada carta negra tiene un 2 al otro lado?*



***Problema 11**: "¡Cómo pasa el tiempo -dijo mi prima-, anteayer yo tenía 19 años y ya el año próximo tendré 22". ¿Es posible lo que me dijo?*

Postres

***Problema 12**: ¡Rápido!, si divides 30 entre 1/2 y al resultado le sumas 10, ¿cuánto da?*

***Problema 13**: Si entre tres gatos cazan tres ratones en tres horas, ¿Cuántos gatos harán falta para cazar cien ratones en 100 horas?*

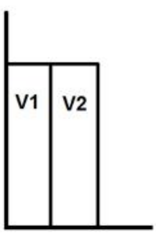
Menú para degustar con calma

Primeros

Problema 14: *Tenemos dos jarras: una con 1/2 litro de agua y otra con 1/2 litro de zumo. Cogemos una cucharada de la de zumo y la echamos en la del agua. Removemos y, a continuación, cogemos una nueva cucharada, esta vez de la mezcla, y la echamos en la jarra del zumo. Después de estas operaciones, ¿qué habrá, más agua en el zumo o más zumo en el agua?*

Problema 15: *Un caminante llega a un pueblo y dos habitantes del lugar le ofrecen compartir los panes de los que disponen. Uno tiene 5 panes y el otro 3. Al final deciden ponerlo todo en común y comérselo entre los tres. El viajero, agradecido, quiere repartir entre sus benefactores 8 euros que lleva en el bolsillo. ¿Cuál sería la forma de reparto más justa?*

Problema 16: *En una estantería, tal y como se ve en la figura, hay una enciclopedia de dos volúmenes. Cada volumen tiene un grosor de 2 cm sin las tapas mientras que cada tapa tiene un grosor de 1 mm. Si una termita tuviera que realizar un túnel en línea recta desde la primera página del primer volumen hasta la última del segundo volumen, ¿cuál sería la longitud de dicho túnel?*



Segundos

Problema 17: *Nos encontramos al otro lado de la puerta de una habitación herméticamente cerrada. Junto a la puerta hay tres interruptores: dos están inutilizados mientras que el tercero enciende la única luz de la habitación. Tenemos que averiguar cuál es abriendo solamente una vez la puerta y teniendo en cuenta que, una vez abierta, no podemos tocar los interruptores.*

***Problema 18**: Dos viejos amigos, antiguos compañeros en la Facultad de Matemáticas, se encuentran después de muchos años. Esta es parte de su conversación:*

- Pues sí, tengo tres hijas
- ¿Sí? ¿Y qué edad tienen ahora?
- Pues mira, el producto de sus tres edades es 36
- Bueno, hay muchas posibilidades. Dame otra pista.
- ¡Hombre, casualmente la suma de sus edades coincide con el número de ese portal!.
- Hum, aún así me falta un dato
- Vale, te diré que la mayor toca el piano...
- ¡Ah, entonces ya lo se!

¿Cuáles eran las edades de las tres hijas?

***Problema 19**: Un monje salió de su convento, que estaba en la cima de una montaña a las 9 de la mañana, estuvo caminando durante tres horas y después paró una hora para comer y descansar un poco. Después, avanzó una hora más camino abajo hasta que llegó al pueblo, donde pasó el resto del día y la noche. Al día siguiente, partió a las 9 de la mañana de vuelta hacia el convento. Lógicamente, cuesta arriba tardó un poco más por lo que llegó a las 3 de la tarde al convento, realizando el trayecto de subida en dos periodos de 3 horas separados por una hora de descanso. Durante el trayecto se preguntó ¿habrá algún punto que haya pasado justo a la misma hora bajando el primer día que subiendo el segundo?*

Postres

***Problema 20**: Un antiguo caballero prometió a su ayudante pagarle, por un año de trabajo, una capa y diez monedas de oro. El caballero, tras 7 meses, tuvo que marcharse, no sin antes entregar a su ayudante la capa más dos monedas de oro en pago por el tiempo que le había servido. ¿En cuánto valoraba la capa?*

***Problema 21**: Un pastor le dijo a otro: si te regalo una de mis ovejas, tendrás el doble de las que yo tengo, mientras que si tú me das una de las tuyas, tendremos las mismas. ¿Cuántas ovejas tenía cada uno?*

Indicaciones

Indicación problema 1

Basta tener en cuenta *el ritmo con el que se reproduce el microorganismo*, por un lado, y el *instante* al que se refiere la pregunta, por otro.

Indicación problema 2

Es recomendable pensar de qué parte de la cruz es más rentable quitar perlas dado el sistema que utiliza la anciana para comprobar el estado de la joya.

Indicación problema 3

Si uno no quiere trabajar mucho, es importante tener claro qué nos pide *exactamente* este problema

Indicación problema 4

De hecho, podría haberse dado cuenta, si se hubiese fijado, a las 9 menos 3 minutos…

Indicación problema 5

No hay que someterse a ninguna restricción que no establezca el enunciado…

Indicación problema 6

Este problema es eficaz dicho de palabra. A pesar de todo, el enunciado está perfectamente escrito…

Indicación problema 7

El tapón cuesta 10 € *más* que el tapón por lo que la diferencia entre ambos precios tiene que ser de 10 €.

Indicación problema 8

Este problema tendría una solución mucho más difícil si fuera por ejemplo una pizza...

Indicación problema 9

Desde luego, no parece muy factible *construir* el poliedro.

Indicación problema 10

En este caso es importante considerar que situaciones *no nos importa que se den* de cara a que se cumpla lo exigido por el problema.

Indicación problema 11

El problema en realidad no tiene "truco", sólo hay que *elegir bien* las fechas.

Indicación problema 12

Lo que pide el enunciado es *dividir entre 1/2*

Indicación problema 13

Merece la pena analizar qué caza consigue realizar este "equipo de tres gatos" en cada hora.

Indicación problema 14

Una pregunta previa sería: después de las dos operaciones, ¿en qué jarra habrá más líquido?

Indicación problema 15

A cada uno de las personas que ofrecieron el pan hay que pagarles en función no *del pan que aportaron* a la comida sino del pan que *realmente cedieron* a los demás.

Indicación problema 16

El túnel comunica la *primera página del primer volumen con la última página del segundo volumen*. Y además, se supone escrito en castellano, inglés, francés…, pero no en árabe.

Indicación problema 17

Hay que considerar tres *estados* diferentes de la bombilla que podamos relacionar con cada uno de los interruptores.

Indicación problema 18

Claramente, hay dos momentos claves de la conversación. Primero, el segundo matemático, que *sí* está viendo el portal (no como nosotros) pero, a pesar de ello, no tiene aún suficientes datos. Y, segundo, por supuesto, qué dato nuevo nos aporta que la hija mayor toque el piano.

Indicación problema 19

Lo que se pregunta es "si será posible"…

Indicación problema 20

La clave es plantearse cuál es el pago que hubiera recibido por los meses que le quedaban por trabajar.

Indicación problema 21

Es interesante analizar qué relación existe entre las dos cantidades cuando, al cambiar una oveja de manos, los dos llegan a tener la misma cantidad.

PARTE I

Apresurados, calculistas y otras especies

Trampas para cazar apresurados

Quizá la de *apresurado* más que una condición sea un estado. A uno le viene la solución de un problema a la cabeza y, sin más, la suelta. Tal vez no sea la mejor, es más, quizá *no sea la correcta*, pero, qué diablos, es una solución, que incluso en ocasiones puede ser la primera, por lo que la tentación de compartirla con el auditorio es grande.

Hay muchas y muy distintas *trampas para cazar apresurados*. Y, como hemos dicho, cuidado, que tú también puedes ser uno de ellos en cualquier momento. Si no, sé honesto y piensa que hubieras respondido a las siguientes cuestiones en caso de no estar avisado:

Problema 7*: Si una botella con tapón cuesta 11 € y la botella cuesta 10 € más que el tapón, ¿cuánto cuesta la botella?*

Probablemente habrías respondido que la botella *lógicamente* vale 10 euros y el tapón, 1 euro.

Problema 12*: Si divides 30 entre 1/2 y al resultado le sumas 10, ¿cuánto da?*

Mucha gente en tu lugar diría que la respuesta es:

$$15 + 10 = 25$$

Problema 13*: Si entre tres gatos cazan tres ratones en tres horas, ¿Cuántos gatos harán falta para cazar cien ratones en cien horas.*

Por una cuestión de evidente proporcionalidad, es probable que pienses que harán falta 100 gatos para una tarea semejante.

Sin embargo, estarás sospechando que, como buen apresurado (aunque sea de forma momentánea), con estas respuestas habrías *caído en la trampa*. Es decir, que, a pesar de ser intuitivas, son todas respuestas incorrectas.

¿Por qué? Si te animas, aún puedes echar un vistazo al final del capítulo a las indicaciones que ofrecemos para cada uno de estos problemas. Si no es así, vamos con sus soluciones:

Solución al problema 7: si la botella cuesta 10 € más que el tapón, es que una botella es igual a un tapón más 10 €. Por tanto, si consideramos una botella más un tapón, valdrá lo mismo que 2 tapones más 10 €. Como la botella más el tapón nos ha costado en total 11 €, y equivale a 2 tapones más 10 €, los 2 tapones tienen que valer 1 € por lo que cada tapón valdrá 0,50 € y la botella 10,50 €.

A diferencia de la solución "intuitiva", con esta se cumplen las condiciones del problema: la diferencia entre botella y tapón es

$$10{,}50\ € - 0{,}50\ € = 10\ €$$

y además el precio de una botella más el tapón es

$$10{,}50\ € + 0{,}50\ € = 11\ €,$$

tal y como pedía el enunciado.

Solución al problema 12: la trampa de este problema se encuentra en la expresión "dividir entre 1/2" que es muy diferente a "dividir entre 2".

Si es necesario, echa mano de la calculadora para comprobar que si bien 30 : 2 = 15, por el contrario si quieres operar 30 : 1/2 = 60 (con la calculadora es más cómodo dividir 30 : 0,5, aunque a poco que recuerdes las fracciones 30 : 1/2 equivale, multiplicando “en cruz” a 60/1 = 60).

Por tanto el resultado final del problema sería:

$$60 + 10 = 70$$

Solución al problema 13: La clave de este problema es centrarse en el “ritmo de trabajo” del “equipo de tres gatos”. Si entre los tres han cazado tres ratones en tres horas, significa que entre los tres han cazado a un ritmo de un ratón cada hora. Por lo que si cazan a un ritmo de un ratón cada hora, *esos mismos tres gatos* son capaces de cazar los cien ratones en cien horas

Vamos con otros dos problemas más largos.

Problema 15*: Un caminante llega a descansar a un pueblo y dos habitantes del lugar le ofrecen compartir los panes de los que disponen. Uno tiene 5 panes y el otro 3. Al final deciden ponerlo todo en común y comérselo entre los tres. El viajero, agradecido, quiere repartir 8 euros que lleva en el bolsillo entre sus benefactores. ¿Cómo debe repartir el dinero para que sea más justo?*

Por supuesto, la primera solución que a uno le viene a la cabeza (y, no nos engañemos, la que quizá aplicaría un viajero real en una situación semejante) sería pagar un euro por cada pan: 5 € para uno y 3 € para otro. Ahora bien, cometería una gran injusticia. ¿Por qué? Puedes consultar la indicación o, si no, tratar de convencerte con la explicación siguiente.

Solución al problema 15: el pan que había en la mesa se lo comieron entre los tres y, si no nos dicen lo contrario, hay que pensar que a partes iguales. Por tanto, se debe tener en cuenta que cada uno de los propietarios del pan *se comió una parte de su propio pan*, por lo que en realidad sólo puso a disposición del resto una parte más pequeña. Como eran 8 panes a repartir, cada comensal disfrutó de 8/3 de pan. Así pues el pan que realmente *regalaron* fue en cada caso:

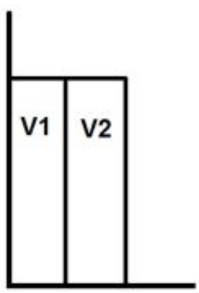
Habitante 1: 5 panes – 8/3 = 15/3 – 8/3 = 7/3

Habitante 2: 3 panes – 8/3 = 9/3 – 8/3 = 1/ 3.

Así pues, si consideramos trozos de un tercio de pan, uno regaló 7 y otro sólo 1 por lo que ese precisamente sería el reparto justo de monedas.

Y finalmente, la trampa para apresurados por excelencia, el problema de la enciclopedia en dos volúmenes. Que conste que es un problema en el que uno tropieza con facilidad incluso disponiendo de tiempo para analizarlo con calma.

Problema 16: *En una estantería, tal y como se ve en la figura, hay una enciclopedia de dos volúmenes. Cada volumen tiene un grosor de 2 cm sin las tapas mientras que cada tapa tiene un grosor de 1 mm. Si una termita tuviera que realizar un túnel en línea recta desde la primera página del primer volumen hasta la última del segundo volumen, ¿cuál sería la longitud en milímetros de dicho túnel?*



Este es un problema brillante, porque la solución es tan inesperada como absolutamente lógica. Si consultas la indicación quizá te ocurra algo parecido y puedes comprobar que la solución en realidad es sencilla. En cualquier caso, a veces cuando planteo este problema añado: “Por cierto, la solución no es 42”, lo cuál evita que se pronuncien los primeros apresurados.

Solución al problema 16: La solución de 42 mm que uno suele plantearse al principio tiene la lógica de que para realizar el túnel que se indica parece que la termita debe cruzar todas las páginas del primer volumen (20 mm) las 2 tapas (1 mm + 1 mm) y todas las páginas del segundo volumen (otros 20 mm). ¿Por qué es incorrecta esta solución?

Si abrimos cualquier libro por su primera página, lo cerramos y lo colocamos en una estantería, esa primera página una vez colocado el libro *queda a nuestra derecha* mientras que *la última página queda a la izquierda*. Por tanto, la termita, para realizar el trayecto pedido, sólo tiene que atravesar las dos tapas, por lo que **la solución es 2 mm**.

Si sirve de consuelo, este problema se planteó en un curso de profesores de Matemáticas y fueron mayoría los que cayeron (caímos) en la trampa de la termita. Algunos intentaron escudarse en complicados discursos sobre números cardinales y ordinales, en lugar de reconocer lo obvio: habíamos caído en las garras de un gran acertijo matemático.

Argucias para entretener a los calculistas

Al igual que comentábamos antes de los apresurados, evidentemente cualquiera puede ser un *calculista* en cualquier momento, es decir puede hacer un uso excesivo de la “caja de herramientas matemáticas” (en un próximo capítulo hablaremos de otros casos en los que merece la pena echar mano de ella) cuando el camino hacia la solución puede ser mucho más sencillo.

Así te presentamos ahora algunas argucias para “entretener a los calculistas”.

Problema 1*: Supongamos que existe un microorganismo que se reproduce cada segundo en otros dos microorganismos idénticos que se reproducen de igual modo y, al introducirlo en una probeta, tarda una hora en llenarla completamente. ¿En qué momento ya habrá llenado la mitad de la probeta?*

Este problema, aplicado a diferentes contextos, es bastante conocido y, con frecuencia, quien lo escucha por primera vez se enfrasca en un montón de cálculos tratando de encontrar ese instante exacto. No es fácil encontrar una indicación que no suponga *demasiada pista* aunque, en cualquier caso, hemos incluido una en la sección correspondiente.

Solución al problema 1: Hay dos formas de interpretar el ritmo de crecimiento de los microorganismos: por un lado, podemos considerar que, cada segundo que transcurre, *habrá el doble* de microorganismos que el segundo anterior, pero eso equivale a considerar que un segundo antes *había la mitad* de microorganismos. Por tanto, si en una hora estaba llena la probeta, un segundo antes, es decir, a **los 59 minutos y 59 segundos**, habría la mitad o, lo que es lo mismo, la probeta estaría llena exactamente hasta su mitad.

Problema 3*: Dos ciclistas situados en localidades diferentes circulan uno en busca del otro a 20 km/h. Cuando les queda una hora para encontrarse, una mosca que vuela a 40 km/h parte del primer ciclista en busca del segundo, cuando lo alcanza da media vuelta en busca del primero, y así sucesivamente hasta que los ciclistas se encuentran. ¿Qué distancia recorre en total la mosca?*

Esta es una de las más eficaces argucias para entretener a un calculista, sobre todo si este ya conoce las ecuaciones que rigen los movimientos de los móviles, pues seguro *querrá aplicarlas*. ¿Y es necesario hacerlo?

Solución al problema 3: El gran malentendido de este problema es pensar que nos piden determinar cuál es la trayectoria que ha seguido la mosca, es decir, en qué momento llega por primera vez al segundo ciclista y da la vuelta, cuándo alcanza de nuevo al primero y, así sucesivamente, hasta que ambos ciclistas se encuentran. Pero nada más lejos de la realidad. Lo único que nos piden es *qué distancia ha recorrido en total* y, dado que conocemos su velocidad, basta con calcular cuál ha sido la duración de su vuelo. Como nos dicen que la mosca empieza a volar *una hora antes* de que se encuentren los ciclistas, *esa* es la duración del vuelo y por tanto recorrerá 40 km.

Problema 14*: Tenemos dos jarras: una con medio litro de agua y otra con medio litro de zumo. Cogemos una cucharada de la jarra de zumo y la echamos en la del agua. Removemos bien y a continuación cogemos una nueva cucharada, esta vez de la mezcla y la echamos en la jarra del zumo. Después de las dos operaciones, ¿qué habrá, más agua en el zumo o más zumo en el agua?*

Reconozco que, de los problemas que figuran en este libro, este es uno de los que me ha dado más quebraderos de cabeza, ya que, aunque el razonamiento de la solución es incontestable, choca con nuestra intuición, o quizá aparece ese calculista que todos llevamos dentro. En cualquier caso, previa indicación o no, echemos mano de las jarras.

Solución al problema 14: Lo importante es fijarse tan solo en la situación final. Si hemos cogido al principio una cucharada de la jarra de zumo y al rato hemos vuelto a echar otra, el contenido en ambas jarra será al final lo mismo que al principio, medio litro en cada una (por cierto, el dato del medio litro es totalmente innecesario, pero ayuda a que los calculistas acudan “al olor del dato”).

En la jarra de zumo todo será zumo salvo una pequeña parte, pongamos 5 centilitros como ejemplo. Pero esos 5 centilitros los hemos obtenido de la jarra de agua y, dado que esta tiene la misma cantidad que al principio, esa pequeña cantidad se ha sustituido por la misma cantidad *en zumo*, por lo hay tanta agua en el zumo como zumo en el agua.

Lo que creo que suele desconcertar de este problema es que si bien la primera cucharada es de *zumo puro*, la segunda es de una mezcla, por lo que uno puede pensar que ese hecho desequilibra la balanza, pero en realidad el *agua que no vuelve al zumo* se equilibra con *el zumo que se queda en el agua.*

Problema 19*: Un monje salió de su convento, que estaba en la cima de una montaña, a las 9 de la mañana, estuvo caminando durante tres horas y después paró una hora para comer y descansar un poco. Tras el merecido descanso, avanzó una hora más camino abajo que llegó al pueblo, donde pasó el resto del día y la noche.*

Al día siguiente, partió a las 9 de la mañana de vuelta hacia el convento. Lógicamente, cuesta arriba tardó un poco más, por lo que llegó a las 4 de la tarde al convento, realizando el trayecto de subida en dos periodos de 3 horas separados por una hora de descanso.

Como tuvo tiempo para pensar, uno de las ideas que se le pasó por la cabeza fue, ¿habrá algún punto que haya pasado justo a la misma hora bajando el primer día que subiendo el segundo?

Este problema para empezar presenta la “muralla del párrafo”: muchos de los que se acercan a él ven el tamaño del enunciado y ya deciden pasar al siguiente. ¡No lo hagas, que este merece la pena! Si ya has tomado nota de todos los datos o has echado un vistazo a la indicación, sólo te queda subir tu propia cuesta para tratar de resolverlo o leer la solución.

Solución al problema 19: Una cosa es la solución y otra la intuición. Sepamos resolverlo o no, ¿parece intuitivo que exista ese punto del camino donde el monje pase el primer día en la bajada y el segundo en la subida *exactamente* a la misma hora?

Pues bien, aunque no te resulte intuitivo, la respuesta es *sí*, y para demostrarlo vamos a echar mano de un argucia cuya efectividad barre de un plumazo todos los cálculos que hayamos podido escribir en una hoja de papel.

La argucia es. ¿por qué no, en vez de pensar que el monje parte un día a las 9 para iniciar el camino de ida y el día siguiente a la misma hora para iniciar la vuelta, no pensamos en dos monjes que parten a la misma hora, uno desde arriba y otro desde abajo? Podemos parar un momento y analizarlo, ¿afecta esta nueva visión a las condiciones del problema? ¿Cambia en algo la hora por la que pasará por cada punto del recorrido? Enseguida comprobarás que la respuesta a estas preguntas es no, con lo cuál seguimos el razonamiento con nuestros dos monjes.

Si consideramos al *monje que baja*, aunque sea más rápido que el otro, antes de llegar a su destino tiene que cruzarse forzosamente con el otro y el lugar de cruce será *precisamente* el punto donde pase a la misma hora cada uno de los días.

Si no recuerdo mal, esta solución la propuso una lectora de una revista donde se proponía este problema y a la que el cansancio de hacer muchos cálculos le llevó a una solución tan elegante como efectiva.

Desquiciar a los cuadriculados

Muchos de los problemas que surgen no tendrían solución si intentáramos interpretar el enunciado al pie de la letra. Los *cuadriculados* la mayoría de las veces lo intentan y las que presentamos a continuación son buenas oportunidades para *desquiciarlos*.

Problema 8*: Un anfitrión quiere cortar un bizcocho de forma circular en ocho partes iguales. Su hija dice que basta con tres cortes rectos. ¿Es posible? ¿Cómo?*

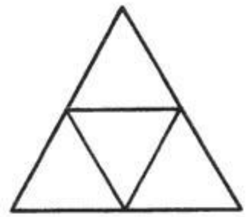
Cuando el cuadriculado coge el cuchillo y trata de resolver el problema, enseguida comprende que la solución no es fácil, dado que se pide obtener 8 trozos *iguales* con *sólo* 3 cortes rectos (cuando *lo normal* serían cuatro).

Solución al problema 8: Muchas veces, quien se enfrenta a este problema trata de hacerlo dibujando un esquema en una hoja de papel y así es imposible. ¿Por qué? La gran diferencia entre el bizcocho y una pizza o la propia hoja de papel es que *el* bizcocho *tiene volumen.* Bastará realizar dos cortes clásicos en forma de cruz y un tercero que corte el bizcocho de forma transversal en dos "capas" con lo que, a cuatro partes por cada capa, obtendremos las 8 partes iguales…

De acuerdo, puedes argumentar que, si el bizcocho está recubierto de algo como chocolate, no serían *partes iguales*, pero corres el riesgo de quedar como uno de esos cuadriculados de tratábamos de desquiciar.

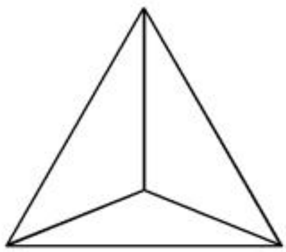
Problema 5: *¿Cómo se pueden formar cuatro triángulos iguales con sólo seis cerillas?*

Está bien, por esta vez seremos nosotros los cuadriculados: se supone que las seis cerillas también son iguales (aunque es cierto que se venden de diferentes tamaños), ya que si no, con tres cerillas más grandes y tres más pequeñas podríamos formar la figura de la derecha, que serían cuatro triángulos iguales.



Una vez aclarado ese punto, el dibujo nos puede servir para calibrar la dificultad del problema. Si con tres cerillas formamos un triángulo, con tres más parece difícil conseguir otros tres triángulos. A menos que... Bueno, alguna pista tienes en la indicación y, si no, puedes leer a continuación la solución.

Solución al problema 5: la única forma de realizarlo es formar con las seis cerillas un tetraedro que es un poliedro con cuatro caras en forma de triángulo equilátero (y con seis aristas, claro).



Problema 6: *Cinco por cuatro veinte más uno veintidós. Y además el cálculo es correcto. ¿Por qué?*

Lógicamente, cuadriculados y apresurados coincidirán en que la respuesta esperada sería veintiuno y no veintidós...

Solución al problema 6: Como aclarábamos en la indicación, el enunciado está perfectamente escrito. De hecho, para que el resultado fuera veintiuno se debería escribir algo así como “Cinco por cuatro, veinte, más uno, veintidós”.

En este caso cuatro veinte equivale a *cuatro con veinte*, 4,20 (de hecho *así* suele expresarse cuando hablamos de una cantidad de dinero). De esta forma:

$$5 \times 4{,}20 = 21 \quad y \quad 21 + 1 = 22,$$

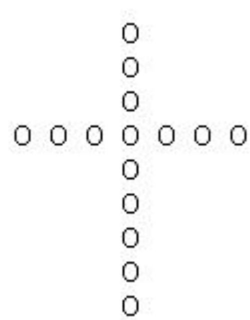
tal y como habíamos “prometido”.

Molestar a los hiperrealistas

Los hiperrealistas son aquellos que, al escuchar un problema, gustan de poner el dedo en la llaga de cualquier aspecto del enunciado que sea poco realista. Por ejemplo, recelarían de ese microorganismo que se reproduce con tanta exactitud como velocidad o de la mosca que tan disciplinadamente viaja de un ciclista a otro. El caso es que no suele faltarles razón en sus reivindicaciones, pero por otro lado, ¿a qué buen problemista le importan realmente?

Una gran parte de los problemas de este libro no resistiría el análisis de la lupa de un hiperrealista, aunque aquí escogemos un par de ellos cuya solución puede molestarles especialmente.

Problema 2*: Una anciana ciega entrega a un joyero una cruz de quince perlas como la de la figura para que la repare, y le advierte que no se le ocurra engañarla quitando alguna perla, ya que ella sabe que, contando desde el extremo de cualquiera de los brazos de la cruz hasta la parte inferior, hay 9 perlas. Sin embargo el joyero se las arregla para quitarle dos perlas sin que ella se de cuenta del cambio. ¿Cómo?*



Ya desde el enunciado, aparte de lo “políticamente incorrecto” de engañar a una pobre anciana ciega, al hiperrealista le pondría muy nervioso el sistema que utiliza la anciana para comprobar que la cruz no ha sido manipulada. En cualquier caso, ya se sabe que el cliente siempre lleva la razón…

Solución al problema 2: la clave del asunto es, dado que la anciana puede realizar la comprobación desde cualquiera de los brazos de la cruz, ¿de dónde es más rentable quitar las dos perlas? Si añadimos una en la parte inferior y quitamos una de cada uno de los brazos, el recuento seguirá siendo de nueve y sin embargo habremos ganado una perla. La otra se puede quitar de la parte superior, que la anciana no revisa, y aún así seguirá conservando la forma de cruz.

Por supuesto, se podrían quitar más perlas de la parte superior pero, cuando la anciana ciega la cogiera entre sus manos, enseguida notaría que la joya no tiene aspecto de cruz…

***Problema 9**: ¿Cómo podemos transformar un hexágono en un poliedro añadiéndole sólo tres segmentos?*

Si ya has realizado el problema de los cuatro triángulos con seis palillos (problema que, por cierto, un hiperrealista tampoco miraría con buenos ojos), podrías responder que no hace falta añadir más segmentos, basta separar los seis lados del hexágono y reorganizarlos en forma de tetraedro. Pero aquí pedimos algo más, se pide que simplemente se añadan tres segmentos al hexágono, sin deformarlo, para formar el poliedro.

Solución al problema 9: la solución en realidad es la representación en dos dimensiones de un cubo (es decir, aplicamos el "truco contrario" que en el problema 5, el del tetraedro).

Para ello basta unir el centro con 3 vértices no consecutivos y se formará la imagen del cubo. Puedes ver el dibujo en la sección de soluciones ya que, si la hubiéramos incluido aquí, habrías captado la solución de un vistazo nada más leer el enunciado.

Echar mano de la caja de herramientas

Aunque los problemistas solemos preferir soluciones intuitivas, que cualquiera, sepa matemáticas o no , pueda entender sin problemas, a veces puede ser útil echar mano de la "caja de herramientas matemáticas". A continuación veremos un par de ejemplos en los que merece la pena.

Problema 20*: Un antiguo caballero prometió a su ayudante pagarle, por sus servicios durante un año, una capa y diez monedas de oro. Desgraciadamente el caballero, después de 7 meses, tuvo que marcharse de aquellas tierras, no sin antes entregar a su ayudante la capa más dos monedas de oro en pago por el tiempo que le había servido. ¿En cuánto valoraba la capa?*

Lo interesante de este problema es que el esquema del razonamiento es similar al que nos facilita la propia caja de herramientas. Puedes intentar cualquiera de las vías (si es necesario con ayuda de la indicación).

Solución al problema 20: Echando mano de la caja de herramientas, basta llamar x al valor de la capa en monedas de oro. Considerando lo que se paga tanto por 7 meses como por el año entero, podemos plantear la siguiente ecuación:

$$\frac{7}{x+2}=\frac{12}{x+10}\ ;\ 7x+70=12x+24\ ;\ 5x=46\ ;\ x=46/5=9{,}2 \text{ monedas}$$

La resolución de esta ecuación nos da una pista de cómo se puede resolver el problema mediante un razonamiento lógico. Si nos planteamos calcular el pago que debería haber recibido por los 5 meses que no llegó a trabajar, bastará restar los dos pagos, el previsto en principio y el que recibió realmente.

La diferencia, dado que en los dos se incluye la capa, serán las 8 monedas restantes. Si por 5 meses debía recibir 8 monedas, por un mes, la quinta parte, 8/5=1,6 monedas mensuales. Por tanto, en todo el año, 12x1,6=19,2 monedas. Descontando las diez monedas que se pensaba pagar en metálico, el resto 19,2-10=9,2 es el valor de la capa en monedas de oro.

Como se puede comprobar, en este caso compensa utilizar la "caja de herramientas".

Problema 21*: Un pastor le dijo a otro: si te regalo una de mis ovejas, tendrás el doble de las que yo tengo, mientras que si tú me das una de las tuyas, tendremos las mismas. ¿Cuántas ovejas tenía cada uno?*

Este problema se diferencia del anterior, en primer lugar, en que resolverlo sin la "caja de herramientas" es más complicado y, por otro, en que merece la pena utilizar dos incógnitas.

Solución al problema 21: Podemos, por ejemplo, llamar x al número de ovejas que tenía *inicialmente* el pastor que "narra el problema" y podemos llamar y a las ovejas que, inicialmente, tenía el otro. Fíjate que es importante, cuando decidimos utilizar herramientas matemáticas, definir bien las cosas ya que hay dos pastores y dos *momentos* en la pequeña "historia" del problema.

Una vez definidas las incógnitas, ya sólo nos queda convertir las condiciones del problema en ecuaciones:

- *Si te regalo una de mis ovejas, tendrás el doble de las que yo tengo*. Dicho de este modo: si el segundo pastor recibe otra oveja, ya tendrá el doble que el primer pastor con una menos.

$$y+1=2(x-1)$$

- *Si tú me das una de las tuyas, tendremos las mismas*. O, lo que es lo mismo, si el primer pastor obtiene una oveja del segundo, ya tienen las mismas

$$x+1=y-1$$

Así, obtenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que, después de "apretar unas tuercas" queda de esta forma:

$$\begin{array}{r} 2x - y = 3 \\ -x + y = 2 \\ \hline x = 5 \end{array}$$

Aunque pueda parecer que las ecuaciones se colocan de forma poco natural en relación a las condiciones del problema, se hace de esta manera para que, al sumarlas, se anule una de las incógnitas y podamos calcular el valor de la otra, en este caso $x=5$.

De la segunda ecuación se desprende que $y = x + 2$, por tanto que $y = 7$

En cuanto a la resolución intuitiva, de la segunda condición, que si el primer pastor recibe una oveja del segundo llegan a tener las mismas, se puede deducir con cierta facilidad que la diferencia entre las dos cantidades es dos. Con eso, aunque se podría quizá realizar algún razonamiento con la otra condición, casi se puede solucionar el problema por tanteo.

En buena lógica

Hemos dejado para el final la que tal vez sea la "sección estrella", aquella que incluye problemas que se pueden solucionar mediante un argumento lógico, no siempre fácil de seguir, pero que en general suelen ser elegante y, a la vez, convincente.

En esta sección utilizaremos una idea que, por lo demás, se puede utilizar en cualquier problema y es la del "paso del puente". Resolver un problema es pasar el puente, salvar un obstáculo, llegar al otro lado... Tal vez el destino final de nuestro trayecto, la solución definitiva del problema, no esté todavía ahí, al otro lado del puente, y haya que resolver todavía algunos flecos, pero en ese momento sí sabemos que de alguna manera el problema está vencido y, como mucho, sólo queda algo de "papeleo".

En algunos problemas el puente está muy bien señalizado y sólo que habrá que fijarse bien en el mapa. En otros, nos tocará rebuscar un poco, mirar si hay un pequeño paso entre la maleza. Pero en todos ellos existirá ese puente y, sobre todo, *sabremos cuándo lo hemos cruzado.*

Problema 4*: Pensé que mi despertador se estaba volviendo loco. Primero marcó las 9 menos 5 y un minuto después las nueve menos 4. Dos minutos después marcó otra vez las 9 menos 4 y un minuto después de nuevo las 9 menos 5. Hasta que a las 9 en punto descubrí qué le pasaba. ¿Qué le era?*

Solución al problema 4: En primer lugar, si la persona propietaria del reloj está al tanto del tiempo que transcurre, es que tiene *otra referencia que le da el tiempo con exactitud* (un reloj de pulsera, un reloj de un edificio del exterior...). Por otro lado, evidentemente, algo le ocurre a ese despertador, si bien aparentemente su *locura no es continua*, sólo ocurre en ciertos minutos concretos...

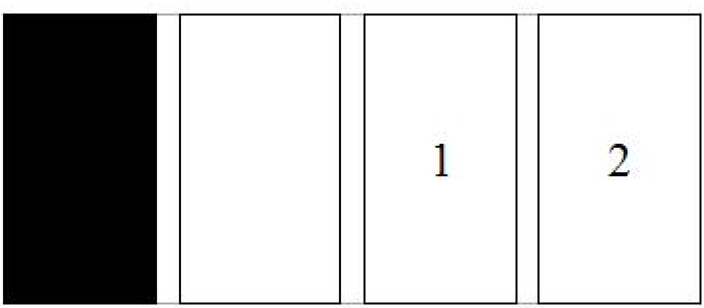
La solución a este problema quizás (o al menos eso me pasó a mí cuando me enfrenté a él por primera vez) requiere quizás de una “idea genial”, de un golpe de inspiración, aunque hay pistas que señalan en su dirección (era un despertador, los fallos se producen sólo en algunos minutos…). ¡Es un reloj digital! Un reloj que funciona “casi” perfectamente. Si estudiamos la siguiente tabla, podremos comprobar *dónde* está el fallo:

Hora real	Hora que aparece
08:55	08:55
08:56	08:56
08:58	08:56
08:59	08:55

Efectivamente, sólo fallaba la pequeña rayita superior de la derecha pero eso hacía que algunas horas (las dos últimas) parecieran cambiadas.

Por supuesto, la trampa está en no mencionar las 8:57 (digamos que salió de la habitación *en ese momento*) ya que a esa hora la avería se manifestaría sin lugar a la confusión… ¿Y puede ocurrir que se averíe sólo una rayita? Bueno, eso lo dejamos en el aire para que se entretengan los hiperrrealistas y cuadriculados…

Problema 10: *Hemos colocado cuatro cartas sobre la mesa. En cada una hay escrito un 1 ó un 2 y el reverso es de color blanco o negro ¿Cuántas cartas y cuáles de ellas debemos dar la vuelta para averiguar si cada carta negra tiene un 2 al otro lado?*



Este problema, en realidad, sería también una magnífica trampa para cazar apresurados ya que, si esto fuera un concurso de televisión de esos que se basan en quién aprieta antes un pulsador, el primero sin pensar apretaría el pulsador y exclamaría: "¡La negra y el dos! Por supuesto, tu ya has leído bastantes páginas de este libro como para sospechar que eso no va ser así...

¿Por qué lo hemos puesto en esta sección? Porque la solución es de una lógica aplastante, como puedes leer a continuación (previo paso o no por la indicación correspondiente)

Solución al problema 10: La clave de este problema es analizar qué relaciones entre anverso y reverso *nos preocupan* y cuáles no. Como queremos averiguar si *cada carta negra tiene un 2 al otro lado*, sólo deben preocuparnos aquellas cartas que pueden *poner en peligro esa afirmación.*

¿Cuáles son pues, las cartas "inofensivas": por supuesto la segunda, que tiene el reverso de color blanco, pues no nos importa en absoluto lo que suceda con las cartas blancas. Y la segunda, quizá de forma más inesperada, es la que tiene un 2. ¿Por qué, si contiene uno de los elementos de la relación que nos piden, no nos importa esa carta?

Estudiemos sus posibilidades: si tuviera el reverso negro, no haría más que reafirmar nuestra hipótesis. Ya, pero, ¿y si tuviera el reverso blanco?. Tampoco pasaría nada, ya que lo que queremos confirmar es *si cada carta negra tiene un 2 al otro lado y eso no excluye la posibilidad de que una carta blanca también lo tenga.* Es como el ejemplo clásico que nos ponían siempre en clase de Lógica: "Si llueve se mojan las calles, pero si la calle está mojada, no significa que haya llovido, puede haberse mojado por otras causas". Puede ser que ese vecino que todos tenemos haya regado a deshoras...

Nos quedan, por tanto, sólo dos cartas. ¿Será necesario dar la vuelta a ambas? La respuesta es sí. Habrá que dar la vuelta a la negra, ya que, si tuviera un 1, echaba por tierra nuestra hipótesis. Y habrá que levantar la del 1 ya que si su reverso fuera negro tampoco podríamos dar la afirmación por buena. Por tanto habrá que levantar la que tiene un 1 y la que tiene el reverso negro.

Problema 11*: "¡Cómo pasa el tiempo -dijo mi prima-, anteayer yo tenía 19 años y ya el año próximo tendré 22". ¿Es posible lo que me dijo?*

Por supuesto, este problema desconcierta en una primera lectura, ya que estamos hablando de una diferencia de tres años en uno solo. Por supuesto, si el cumpleaños es de aquí a final de año añadiría otro año, pero ¿y el resto?

Solución al problema 11: a poco que se trabaje un poco en este problema, enseguida surgen las fechas que giran alrededor de fin de año para conseguir introducir días entre *anteayer* y el *año que viene*.

Como lo que nos interesa es que *anteayer* mi prima tuviera la menor cantidad de años posible, su cumpleaños tiene que ser posterior a ese día. Por otro lado, para alargar el plazo lo más posible, nos interesa que la frase se diga ya en Enero, de forma que el *año próximo* sea dos más tarde de cuando tenía 19.

La frase, en resumen, se dirá el 1 de enero. Pongamos que de 2008, para centrarnos. De esta forma:

- 30 de diciembre de 2007: aún tiene 19 años
- 31 de diciembre de 2007: cumple 20 años.
- 1 de enero de 2008: dice que "anteayer tenía 19 años", lo cuál es cierto
- 31 de diciembre de 2008: cumple 21 años
- 31 de diciembre de 2009: cumple 22 años. Con lo cuál tiene sentido que el 1 de enero de 2008 diga que "el año que viene tendré 22"

***Problema 17**: Nos encontramos al otro lado de la puerta de una habitación herméticamente cerrada. Junto a la puerta hay tres interruptores: dos están inutilizados mientras que el tercero enciende la única luz de la habitación. Tenemos que averiguar cuál es abriendo solamente una vez la puerta y teniendo en cuenta que, una vez abierta, no podemos tocar los interruptores.*

Antes de sentarnos a degustar este problema, *quitemos todos los estorbos de la mesa*: no, no hay ninguna rendija por la que pueda colarse la luz. Mucho menos una ventana. No, ninguno de los tres interruptores está marcado ni hay nada que lo distinga de los otros dos. Tampoco los que no encienden la luz generan ningún otro efecto. Tampoco la dueña de la casa nos deja coger el destornillador y hurgar en el cableado.

Dicho de otra forma, debemos resolver el problema por pura lógica y sin tocar nada más que los interruptores hasta que decidamos abrir la puerta, sabiendo que en ese momento será precisamente cuando ya no podremos tocarlos.

Solución al problema 17: Lógicamente, el escollo de este problema es que nos encontramos con que debemos decidir entre tres interruptores cuando en principio sólo hay dos posibles estados de la bombilla: *encendido* y *apagado*. Así pues, nuestros esfuerzos parece que deben centrarse en determinar un tercer estado.

La clave es que no tenemos ninguna limitación en relación a las maniobras que podemos hacer con los interruptores antes de abrir la puerta. En concreto, no tenemos limitación de *tiempo*. Y es el tiempo el que nos va a permitir ese estado extra, ya que si encendemos una bombilla, la dejamos un tiempo suficiente para que se caliente y después la apagamos, en ese momento estará *apagada pero caliente*.

Y con este razonamiento ya hemos "pasado el puente". Ya sólo queda numerar los interruptores y concretar cuál será la secuencia de movimientos que haremos antes de abrir la puerta: encenderemos el primer interruptor, dejaremos que pase el tiempo suficiente para que la bombilla se caliente, lo apagaremos y encenderemos el segundo. Y ya sólo queda relacionar cada estado con el interruptor correspondiente.

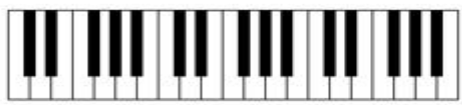
Estado de la bombilla	Interruptor pulsado
Encendida	2
Apagada y caliente	1
Apagada y fría	3

Una aclaración: algunas versiones de este problema utilizan cuatro interruptores, para lo cuál distinguen entre los estados "Encendida y fría" (recién encendida, vaya) y "Encendida y caliente" (encendida hace ya rato), si bien para ello hay que entrar en el peligroso terreno de la percepción y tratar de determinar no sólo cuánto tiempo necesita una bombilla para estar caliente sino, lo que es más importante, si todos tendríamos la misma percepción de esa cantidad de calor.

Problema 18: *Dos viejos amigos, antiguos compañeros en la Facultad de Matemáticas, se encuentran después de muchos años. Esta es parte de su conversación:*

- Pues sí, tengo tres hijas
- ¿Sí? ¿Y qué edad tienen ahora?
- Pues mira, el producto de sus tres edades es 36
- Bueno, ya sabes que hay un montón de posibilidades. Dame alguna otra pista.
- ¡Hombre, casualmente la suma de sus edades coincide con el número de ese portal!.
- Hum, aún así me falta un dato
- Vale, te diré que la mayor toca el piano...
- ¡Ah, entonces ya lo se!

¿Cuáles eran las edades de las tres hijas?



No es casual que haya dejado este problema para el final de esta primera parte del libro. Es un problema al que tengo mucho cariño pues me lo propusieron hace más de veinte años, cuando todavía era un estudiante de bachillerato y es quizá uno de los principales "culpables" de mi afición por los problemas de este tipo.

Por otro lado, es un acertijo que no necesita más promoción que su propio interés. Como un buen cuento, tiene un final sorprendente y, matemáticamente... Bueno, eso lo dejamos para la solución.

Solución al problema 18: Lo increíble de este problema, y de ahí que pertenezca a esta sección es que su resolución es de una lógica perfecta. Cuando planteo este problema y mis interlocutores no saben cómo empezar, les animo a que, al menos, estudien cuántas combinaciones *diferentes* de edades hay, es decir, cuántos conjuntos de tres números cuyo producto sea 36. No con mucha dificultad se llega a esta lista de posibilidades

Las que empiezan por 1:

1 x 1 x 36
1 x 2 x 18
1 x 3 x 12
1 x 4 x 9
1 x 6 x 6

Por supuesto que las dos primeras son un poco excéntricas, pero válidas.

Veamos las que empiezan por 2:

2 x 3 x 6
2 x 2 x 9

Y finalmente

3 x 3 x 4

Es decir, hay 8 posibilidades, por lo que es lógico que el segundo matemático dude... Ahora bien, y este va a ser nuestro “paso del puente”, si su amigo le indica que la suma de las tres edades coincide con la suma de un portal que *ambos están viendo*, ¿por qué él todavía tiene dudas?

De nuevo aquí animo a mis interlocutores a que hagan cuentas, es decir, que calculen la suma de cada una de las combinaciones:

Combinación	Suma
1 x 1 x 36	38
1 x 2 x 18	21
1 x 3 x 12	16
1 x 4 x 9	14
1 x 6 x 6	**13**
2 x 3 x 6	11
2 x 2 x 9	**13**
3 x 3 x 4	10

Efectivamente, sólo hay una suma que se repite, 13, en dos ocasiones, por lo que si el portal hubiera sido cualquiera de los otros números resultados de la suma *el segundo matemático no hubiera tenido ninguna duda* de cuáles eran las edades y, puesto que *las tenía*, es que el portal era el 13.

¿Y el piano? ¿Cuál es su papel en esta historia? Dado que las posibles combinaciones eran 9x2x2 y 6x6x1 (las dos que suman 13), al decirnos que *la mayor* toca el piano, tiene que referirse a 9x2x2 ya que así sólo hay una hija que es *la mayor* (en la otra hay dos gemelas, de 6 años cada una, que son *las mayores* y tendría que haber dicho si acaso "una de las mayores toca el piano").

Por tanto las tres edades son 9, 2 y 2.

Es este un problema bastante popular. Por supuesto el dato del piano es muy pintoresco y suele centrar una gran parte de las preguntas que se formulan al plantearlo (reconozco, para seguro escándalo de los hiperrealistas, que últimamente hasta me invento cuál es el número de teclas que tiene un piano, ya que es una pregunta que no suele faltar).

Hay otras versiones que otorgan a la hermana mayor otra habilidad o característica distinta a la de tocar el piano. También suele aparecer el nombre de Einstein relacionado con el problema, bien como supuesto inventor del acertijo bien como protagonista del enunciado (como uno de los matemáticos que se encuentran). La versión más creíble, en mi opinión, es otra que explica que unos alumnos plantearon a Einstein el acertijo y a él le gustó.

PARTE II

Parque problematemático

Hechos a medida

En este apartado recogemos distintos problemas relacionados con pesos y todo tipo de medidas. Para empezar, proponemos una terna de problemas en los que hay que *jugar* con ciertas partes o fragmentos del total. Aunque todos ellos tienen una lógica clara y precisa, quizá no sean tan sencillos como pueda parecer a primera vista. Recuerda que para todos ellos tienes indicaciones al final del capítulo o, si no, las soluciones al final del libro.

Problema 22*. Un ladrillo pesa lo mismo que 3/4 de ladrillo más 3/4 de kg. ¿Cuántos kg. pesa en total?*

Problema 23*. ¿Qué altura tiene un árbol, que es 2 metros más corto que un poste de altura triple que la del árbol?*

Problema 24*.¿Qué hora es, si quedan del día la tercera parte de las horas que han pasado?*

Aunque ya hemos "estrenado" la balanza en el problema 22, quizá los acertijos más clásicos que la utilizan son los que se refieren al peso de un cierto número de objetos iguales, por ejemplo bolas. Vamos a ver en primer lugar uno de los más clásicos.

Problema 25*. Tenemos 9 bolas, una de las cuáles pesa menos que el resto. Averiguar cuál es utilizando una balanza de dos platillos la menor cantidad de veces posible.*

Este es un claro ejemplo de cómo dos problemas casi idénticos en su enunciado, pueden ser radicalmente diferentes en su dificultad. Si en vez de decir que una bola pesa *menos* que el resto dijéramos que pesa *más*, el problema sería idéntico en su forma de resolución. Ahora bien si la condición fuera que hay una bola cuyo peso es *distinto* (sin saber si es mayor o menor) al del resto, la dificultad aumenta enormemente. La solución ocupa un folio repleto de posibles casos y la prueba de lo poco intuitivo de su resolución es que, aunque yo la obtuve en su día, hoy tendría que dedicar un cierto tiempo para *recuperarla* en su totalidad.

El siguiente problema supone un salto cualitativo y es uno de esos pocos problemas en el que los apresurados se quedan cruzados de brazos. Y es que hablamos ya de 100 sacos llenos de bolas, ¡y sólo podemos usar una vez la balanza!

Problema 26. *Tenemos 100 sacos con 100 bolas cada uno. Todas las bolas pesan 10 g salvo las que contiene uno de los sacos, en el que todas pesan 9 g. ¿Se puede averiguar cuál es utilizando solamente una vez una balanza?*

Indicaciones

Indicación problema 22

Si no nos importa echar mano de la caja de herramientas matemáticas, bastaría con una buena regla de tres. Si no, hay que plantearse, ¿qué es lo que pesa ¾ de kg.?

Indicación problema 23

Basta medir "en árboles" la diferencia entre el poste y el árbol.

Indicación problema 24

¿Qué parte queda *realmente* del día?, ¿la tercera?

Indicación problema 25

La clave está en plantearse que, si quiero descubrir cuál de las bolas es más ligera en una sola pesada, cuál es el número máximo de bolas entre las que puedo decidirme.

Indicación problema 26

La ventaja que ofrece este enunciado y la clave para resolverlo es que no se trata de 100 bloques compactos sino de 100 sacos, cada uno de ellos con 100 bolas.

Cortar y pegar

En esta sección de "corta y pega" reunimos distintos problemas en los que hacemos y deshacemos, desunimos y reunimos.

Problema 27. *Un fumador empedernido que estaba de vacaciones en la montaña tenía ya sólo 25 cigarrillos. Así que a partir de ese momento decidió guardar las colillas, ya que sabía que con cada 5 colillas podría formar un nuevo cigarrillo. Una vez que se quedó con las 25 colillas, ¿cuántos cigarrillos más fue capaz de fumarse?*

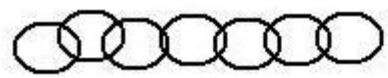
Por supuesto no entramos en consideraciones sobre la calidad de esos nuevos cigarrillos (además, no olvidemos que el fumador está en una situación de *emergencia*).

Problema 28*. Un reloj de pared se cae al suelo y la esfera se rompe en tres trozos de forma que la suma de las cifras que aparecen en cada uno de los trozos coincide. ¿Cuáles eran los trozos?*

Si el problema 28 es un caso especial de "partición", a continuación presentamos dos ejemplos de un tipo clásico de problema: el de "cadenas y eslabones".

Problema 29. *A partir de cuatro trozos de cadena de tres eslabones cada uno se quiere construir una sola cadena cerrada de 12 eslabones. ¿Cuántos eslabones habrá que romper como mínimo para realizar la tarea pedida?*

Problema 30. *Un caminante que llega a una posada no tiene dinero en efectivo pero sí una cadena de oro de 7 eslabones que ofrece como pago al posadero. Como no se conocen de nada, y para evitar desconfianzas, acuerdan que el caminante irá pagando un eslabón cada día. ¿Cuál es el mínimo número de eslabones que debe abrir el caminante para poder realizar los pagos de la forma acordada?*



Y, para terminar, otro negocio de ”pago a plazos”, en este caso, con una barra de plata.

Problema 31. *Un buscador de plata, que necesitaba pagar el alquiler de marzo por adelantado y no tenía dinero, le propuso a la casera pagarle con una barra de plata de 31 cm, de forma que cada día le entregaría como pago un cm de barra. ¿Cuál es el mínimo número de cortes necesario que debía hacer el buscador de plata a la barra (y dónde debía hacer esos cortes) para que pudiera llevar a cabo el pago de esa forma?*

Indicaciones

Indicación problema 27

Hay que recordar que con cada 5 colillas puede formar un nuevo cigarrillo.

Indicación problema 28

Hay que conseguir dividir el reloj en tres trozos de forma que la suma de las *cifras* de cada trozo sea la misma.

Indicación problema 29

Antes de buscar la solución óptima, es interesante buscar *una* solución. Si situamos las cuatro cadenas en círculo con ánimo de unirlas, ¿cuántos eslabones habrá que romper? Luego es cuestión de analizar si esa solución se puede o no mejorar.

Indicación problema 30

Lo importante no es que el caminante le pague al posadero un eslabón cada día, sino que el posadero tenga siempre tantos eslabones como días lleva alojado el caminante en la posada.

Indicación problema 31

La mejor indicación es echar mano al problema 30 ya que, si se resolvió el anterior, este tiene una "filosofía" parecida.

Haciendo y deshaciendo números

Este es el último capítulo, así que, si no lo has hecho antes, es el momento de "soltarse la melena". Todos los problemas aquí reunidos proponen distintos acertijos destinados a encontrar o modificar distintos números. Sólo hay una regla: todo vale con tal de llegar a nuestro objetivo. Así que, ponte el cuchillo entre los dientes, que en este capítulo "no se hacen prisioneros"

Normalmente, cuando me enfrento a un grupo de *problemistas* por primera vez, suelo empezar siempre con un par de problemas breves, pero que mandan el mensaje contundente de que "aquí las cosas van a ser de otra manera". Uno es el problema 6 y el otro, aunque en otra versión, es este:

Problema 32. *Encontrar un número cuya mitad es seis, pero… ¡también siete!*

A continuación, una batería de tres problemas en los que hay que recolocar números. Lo mejor es imaginar que tenemos lo números físicamente delante de nosotros (de hecho, en el primero de los tres acertijos son números de metal) y "jugar" con ellos para tratar de cumplir cada uno de los retos que se nos plantean.

Problema 33. *El portero de una finca va a colocar los números de metal que forman el número de su portal, el 4761. Su hija está jugando con ellos y el portero le propone que los coloque de manera que formen un número de cuatro cifras que no sea múltiplo de 9. ¿Cómo puede hacerlo?*

Problema 34. *Modificar la igualdad 76 = 24 para que sea correcta recolocando los números que en ella aparecen.*

Problema 35. *Con un único movimiento, convertir esta igualdad en cierta*

101-102=1

Otra de las categorías habituales en los acertijos matemáticos es la de las figuras formadas por palillos o cerillas en las que hay que añadir o quitar alguno de esos elementos con el fin de conseguir otro tipo de figura. Hemos seleccionado dos (en realidad son cuatro pues el primero de ellos es un "pack" de tres acertijos, a cuál más exigente), en los que con total probabilidad tendrás que echar mano de toda tu imaginación.

Problema 36. *Considerando estas igualdades formadas por cerillas, convertirlas en ciertas moviendo sólo una de ellas,*

a) IIII = I   *b)* XII=I   *c)* VI=II

Problema 37.*Quitar de esta figura cinco palillos y que quede uno.*

Y ahora, dos problemas en los que parece que "no salen las cuentas". ¿O sí que salen?

Problema 38.

"A un cerezo subí
donde cerezas había.
Ni cerezas cogí
ni cerezas dejé.
¿Cuántas cerezas había?

Problema 39. *Cuando fui a comprar 1 me cobraron 1 €, días después compré 12 y me pidieron 2 € así que cuando vi que necesitaba 144 preparé 3€. ¿Qué tipo de artículos estaba comprando?*

Y, si la segunda parte la terminábamos con uno de nuestros problemas favoritos (el de las tres hijas, que *la mayor de ellas toca el piano*), para cerrar esta parte queremos hacerlo con otro de nuestros preferidos. Es un enunciado sencillo pero que esconde una solución elegante, pero, normalmente, inesperada.

Problema 40. *¿Qué representa la siguiente secuencia?*

0, 5, 4, 2, 9, 8, 6, 7, 3...

Indicaciones

Indicación problema 32

Lógicamente, si se afirma que la mitad es 6 pero también 7, es evidente que, al menos en uno de los casos, no estamos hablando de la mitad en sentido *aritmético*.

Indicación problema 33

Es evidente que como las cifras de 4761 suman 18, que es múltiplo de 3, aunque cambiemos el orden de las cifras el número seguirá siendo múltiplo de 9. Pero no olvidemos que estamos trabajando con números de metal...

Indicación problema 34

Como recolocando sin más las cifras, la igualdad no parece posible habrá que permitirse un par de "licencias".

Indicación problema 35

La solución de este problema podría "venir de regalo" con la del problema anterior.

Indicación problema 36

Los tres desafíos (o más bien sus soluciones) difieren bastante entre sí. Uno de ellos, quizá el más sencillo, tiene una solución más bien esperable, *estándar.*

Otro requiere un poco de manga ancha para aceptar el resultado mientras que el tercero (sí, las indicaciones están en orden) tiene una solución elegante pero uno debe plantearse cuántas operaciones matemáticas conoce *realmente.*

Indicación problema 37

Que conste que la operación es precisa y el resultado exacto. Sería una lástima estropear este problema con alguna otra indicación.

Indicación problema 38

La clave es que ni cogí *cerezas* ni dejé *cerezas*. Y sí que *había cerezas*.

Indicación problema 39

¿Cómo podemos relacionar 1, 12 y 144 con 1, 2 y 3, respectivamente?

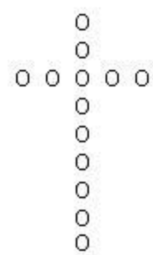
Indicación problema 40

Puede ayudar leer en voz alta la secuencia de números.

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS

Solución al problema 1: Hay dos formas de interpretar el ritmo de crecimiento de los microorganismos: por un lado, podemos considerar que cada segundo que transcurre *habrá el doble* de microorganismos que el segundo anterior, pero eso equivale a considerar que un segundo antes *había la mitad* de microorganismos. Por tanto, si en una hora estaba llena la probeta, un segundo antes, es decir, a **los 59 minutos y 59 segundos**, habría la mitad o, lo que es lo mismo, la probeta estaría llena exactamente hasta su mitad.

Solución al problema 2: Si añadimos una perla en la parte inferior y quitamos una de cada uno de los brazos, el recuento seguirá siendo de nueve y sin embargo habremos ganado una perla. La otra se puede quitar de la parte superior, que la anciana no revisa, y, aún así, seguirá conservando la forma de cruz.



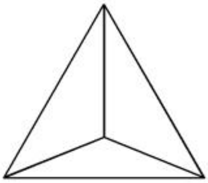
Solución al problema 3: Lo único que nos piden en este problema es calcular qué distancia ha recorrido en total y, dado que conocemos su velocidad, basta con calcular cuál ha sido la duración de su vuelo. Como nos dicen que la mosca empieza a volar *una hora antes* de que se encuentren los ciclistas, esa es la duración del vuelo y por tanto, al ser su velocidad de 40 km/h, recorrerá 40 km.

Solución al problema 4: Hay pistas que señalan en la dirección de la solución: era un despertador, los fallos se producen sólo en algunos minutos… Es un reloj digital, un reloj que funciona "casi" perfectamente. Si estudiamos la siguiente tabla, podremos comprobar *dónde* está el fallo:

Hora real	Hora que aparece
08:55	08:55
08:56	08:56
08:58	08:56
08:59	08:55

Efectivamente, sólo fallaba la pequeña rayita superior de la derecha, pero eso hacía que algunas horas (las dos últimas) parecieran cambiadas.

Solución al problema 5: la única forma de realizarlo es formar con las seis cerillas un tetraedro, que es un poliedro con cuatro caras en forma de triángulo equilátero (y con seis aristas, claro).



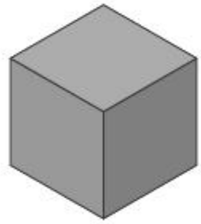
Solución al problema 6: En este caso *cuatro veinte* equivale a *cuatro con veinte*, 4,20. Así

5 x 4,20 = 21 y 21 + 1 = 22

Solución al problema 7: si la botella cuesta 10 € más que el tapón, 1 botella = 1 tapón + 10 €, así que 1 botella + 1 tapón costaría lo mismo que 2 tapones + 10 €. Como la botella más el tapón nos ha costado en total 11 €, entonces los 2 tapones valen 1 €, por lo que cada tapón vale 0,50 € y la botella 10,50 €.

Solución al problema 8: Bastará realizar dos cortes clásicos en forma de cruz y un tercero que corte el bizcocho de forma transversal en dos “capas” con lo que, a cuatro partes por cada capa, obtendremos las 8 partes iguales…

Solución al problema 9: la solución en realidad es la representación en dos dimensiones de un cubo. Para ello basta unir el centro con 3 vértices no consecutivos y se formará la imagen del cubo.



Solución al problema 10: Como queremos averiguar si *cada carta negra tiene un 2 al otro lado*, sólo deben preocuparnos aquellas cartas que pueden poner en peligro esa afirmación.

Las cartas inofensivas son la segunda, que tiene el reverso de color blanco, pues no nos importa lo que suceda con las cartas blancas, y la que tiene un 2. Estudiemos las posibilidades de esta: si tuviera el reverso negro, no haría más que reafirmar nuestra hipótesis y, si lo tuviera blanco, tampoco pasaría nada, ya que lo que queremos confirmar es *si cada carta negra tiene un 2 al otro lado y eso no excluye la posibilidad de que una carta blanca también lo tenga.*

Nos quedan, por tanto, sólo dos cartas. ¿Será necesario dar la vuelta a ambas? La respuesta es sí. Habrá que dar la vuelta a la negra, ya que, si tuviera un 1, echaría por tierra nuestra hipótesis. Y habrá que levantar la del 1 ya que si su reverso fuera negro tampoco podríamos dar la afirmación por buena.

Solución al problema 12 *dividir entre 1/2* es muy diferente a *dividir entre 2*. Puedes usar la calculadora para comprobar que, si bien 30 : 2 = 15, por el contrario 30 : 1/2 = 60 (con la calculadora es más cómodo dividir 30 : 0,5, aunque, en cualquier caso, 30 : 1/2 equivale, multiplicando "en cruz" a 60/1=60). Por tanto el resultado final del problema sería 60 + 10 = 70

Solución al problema 13: La clave de este problema es centrarse en el "ritmo de trabajo" del "equipo de tres gatos". Si entre los tres han cazado tres ratones en tres horas, significa que entre los tres han cazado a un ritmo de *un ratón cada hora*. Por lo que, si cazan a un ritmo de un ratón cada hora, esos mismos tres gatos son capaces de cazar los cien ratones en cien horas

Solución al problema 14: Después de cambiar las dos cucharadas, en la jarra de zumo todo será zumo salvo una pequeña parte, pongamos 5 centilitros, por ejemplo. Pero esos 5 centilitros los hemos obtenido de la jarra de agua y, dado que esta tiene la misma cantidad que al principio (ya que hemos repuesto la cucharada que sacamos al principio del zumo), esa pequeña cantidad se ha sustituido por la misma cantidad en zumo, por lo hay tanta agua en el zumo como zumo en el agua.

Solución al problema 16: Si abrimos cualquier libro por su primera página, lo cerramos y lo colocamos en una estantería, esa *primera página*, una vez colocado el libro, *queda a nuestra derecha* mientras que *la última página* queda *a la izquierda*. Por tanto, la termita, para realizar el trayecto pedido, sólo tiene que atravesar las dos tapas, por lo que la solución es 2 mm.

Solución al problema 17: Nos encontramos con que debemos decidir entre tres interruptores cuando en principio sólo hay dos posibles estados de la bombilla: *encendido* y *apagado*. Así pues, debemos determinar ese tercer estado.

Como no tenemos limitación de tiempo, podemos obtener ese estado extra ya que, si encendemos una bombilla, la dejamos un tiempo suficiente para que se caliente y después la apagamos, en ese momento estará apagada *pero caliente*.

Así pues, encenderemos un primer interruptor, dejaremos que pase el tiempo suficiente para que la bombilla se caliente, lo apagaremos y encenderemos el segundo. Y ya sólo queda relacionar cada estado con el interruptor correspondiente.

Estado de la bombilla	Interruptor pulsado
Encendida	2
Apagada y caliente	1
Apagada y fría	3

Solución al problema 18: Estudiamos en primer lugar cuántos conjuntos de tres números hay cuyo producto sea 36.

1 x 1 x 36
1 x 2 x 18
1 x 3 x 12
1 x 4 x 9
1 x 6 x 6
2 x 3 x 6
2 x 2 x 9
3 x 3 x 4

Es decir, hay 8 posibilidades, por lo que es lógico que el segundo matemático dude... Ahora bien, si la suma de las tres edades coincide con la suma de un portal que *ambos están viendo*, ¿por qué aún tiene dudas? Calculemos la suma de cada una de las combinaciones:

Combinación	Suma
1x1x36	38
1x2x18	21
1x3x12	16
1x4x9	14
1x6x6	13
2x3x6	11
2x2x9	13
3x3x4	10

Comprobamos que sólo hay una suma que se repite en dos ocasiones (13), por lo que si el portal hubiera sido cualquiera de los otros números resultados de la suma, *el segundo matemático no hubiera tenido ninguna duda* de cuáles eran las edades y, puesto que las tenía, es que el portal era el 13.

Dado que las posibles combinaciones eran 9x2x2 y 6x6x1 (las dos que suman 13), al decirnos que *la mayor* toca el piano, tiene que referirse a 9 x 2 x 2 ya que así sólo hay *una hija que es la mayor.* Por tanto las tres edades son 9, 2 y 2.

Solución al problema 19: La respuesta es sí. Para comprobarlo, en vez de pensar que el monje parte un día a las 9 para iniciar el camino de ida y el día siguiente a la misma hora para iniciar la vuelta, podemos pensar en dos monjes que parten a la misma hora, uno desde arriba y otro desde abajo.

Este nuevo enfoque no afecta a las condiciones del problema ni cambia en absoluto la hora del día por la que pasará por cada punto del recorrido. Si consideramos al *monje que baja*, aunque sea más rápido que el otro, antes de llegar a su destino tiene que cruzarse forzosamente con el otro y el lugar de cruce será precisamente el punto donde pase a la misma hora cada uno de los días.

Solución al problema 20: Basta llamar x al valor de la capa en monedas de oro. Considerando lo que se paga tanto por 7 meses como por el año entero, podemos plantear la siguiente ecuación:

$$\frac{7}{x+2}=\frac{12}{x+10}\ ;\ 7x+70=12x+24\ ;\ 5x=46\ ;\ x=46/5=9{,}2 \text{ monedas}$$

Solución al problema 21: Podemos, por ejemplo, llamar *x* al número de ovejas que tenía inicialmente el pastor que "dice el problema" y podemos llamar *y* a las ovejas que, inicialmente, tenía el otro. Así, obtenemos el sistema de ecuaciones:

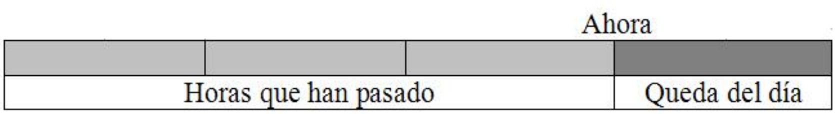
$$\begin{aligned} y+1 &= 2(x-1) \\ x+1 &= y-1 \end{aligned} \qquad \begin{array}{r} 2x - y = 3 \\ -x + y = 2 \\ \hline x = 5 \end{array}$$

De la segunda ecuación se desprende que y = x + 2, por tanto que y = 7, por lo que uno tenía 5 ovejas y el otro, 7.

Solución al problema 22: Si un ladrillo pesa lo mismo que 3/4 de ladrillo más 3/4 de kg, *este precisamente* es el peso de la parte de ladrillo que falta, es decir 1/4 de ladrillo. Si un cuarto de ladrillo pesa 3/4 de kg, el ladrillo completo pesará cuatro veces más. Basta recordar que $3/4 \cdot 4 = 3$ kg, que son los que pesa el ladrillo en total.

Solución al problema 23: dado que el poste es el triple de alto que el árbol, eso equivale a decir que la altura de un poste equivale a la de 3 árboles. O, lo que es lo mismo, que la diferencia de altura entre el poste y un árbol equivale a dos árboles. Pero como esa diferencia vale 2 metros, cada árbol tiene altura 1 m.

Solución al problema 24: La clave es que si queda del día la tercera parte de las horas que han pasado, es que queda *la cuarta parte* del día. Puede verse mejor en este esquema.



Si lo que queda es la tercera parte de lo que ya ha transcurrido es que el día completo equivale a cuatro veces el número de horas restante, es decir, queda la cuarta parte de las 24 horas, es decir, quedan 6 horas y, por tanto, son las 18 h.

Solución al problema 25: Si tengo que decidir qué bola es la más ligera de dos posibles, basta poner cada una en un platillo y compararlas. ¿Y si tengo que elegir entre tres posibles candidatas? Pues, simplemente, ponemos una bola en cada platillo y dejamos otra fuera. Si la balanza está desequilibrada, puedo comprobar cuál es más ligera y, si está equilibrada, la más ligera es la que se ha quedado fuera.

Por tanto, el objetivo será quedarse sólo con tres "finalistas". ¿Cómo lo haremos? Realizando el mismo procedimiento pero con grupos de tres. Separo las nueve bolas en tres grupos de tres y comparo dos de esos grupos. Si la balanza está desequilibrada el grupo más ligero de tres bolas será el de las finalistas. Si está equilibrada las finalistas serán las que se han quedado fuera.

Por tanto, bastan dos pesadas para comprobar cuál de las nueve es la que pesa menos que el resto.

Solución al problema 26: En este problema la clave es que, dado que sólo podemos usar la balanza una vez, de alguna forma hay que poner *información de todos los sacos*, es decir, que haya en la balanza "algo" de cada saco pero además algo que sea diferente a lo que hemos puesto de los otros sacos. ¿Como podemos hacerlo?

El hecho de que cada uno de los cien sacos tenga a su vez cien bolas nos permite sacar un número distinto de bolas de cada saco, en concreto, podemos sacar 1 bola del primer saco, 2 del segundo y así, sucesivamente, hasta sacar 100 bolas del último saco.

Es decir estaríamos pesando 1 + 2 + ...+ 99 +100 = 5050 bolas (ya veo a los hiperrealistas echándose las manos a la cabeza, "¡pesar 5050 bolas en una balanza!", aunque, sin duda, lo más difícil sería contar las de los últimos sacos sin equivocarse). Por cierto, sumar del 1 al 100, como ya hizo el matemático Gauss siendo un chaval, equivale a multiplicar 101 (100 + 1 = 99 + 2 = 98 + 3...) por 50 parejas.

Una vez que comprobamos el peso de todas las bolas, realizamos el siguiente razonamiento:

- Si todas las bolas pesaran 10g, el total de bolas de la balanza pesaría 50500g, es decir 50,5 kg.

- Pero sabemos que no puede ser así, ya que hay un saco con bolas más ligeras de 9 g. Por tanto la balanza marcará menos.
- Supongamos que marca 50480 g. Eso significa que el conjunto ha pesado 20 g. menos que si todas pesaran 10 g y, *dado que cada bola ligera pesa 1 g menos que una pesada*, si el conjunto de bolas ha pesado 20 g menos es que *había 20 bolas ligeras* y el saco es el número veinte.

Por supuesto, en este problema no podemos decir *qué número tiene* el saco de las bolas ligeras (ya que ni siquiera tenemos los sacos delante), sino que facilitamos un método con el que lo podríamos averiguar.

Solución al problema 27: Por supuesto, esta podría ser una trampa para apresurados (pero *muy* apresurados) ya que si son veinticinco colillas, y con cada cinco forma un nuevo cigarrillo, podrá formar cinco cigarrillos. Por supuesto, ese razonamiento es indiscutible, pero no suficiente.

¿Por qué? Porque, una vez que hubiera formado esos cinco nuevos cigarrillos, le quedarían cinco colillas de "nueva generación" con las que podría formar un sexto y último cigarrillo (que, ciertamente, tendría el mismo sabor que un café frío de hace tres días, pero eso es otra historia). Con lo que en total podría formar seis cigarrillos.

Solución al problema 28: Dado que la suma de las cifras tiene que ser la misma en los tres trozos parece interesante comenzar calculando cuál será la suma de las cifras de los doce números del reloj. Cuidado que hablamos de *cifras*, no de *números*, por lo que habrá que contar por separado las cifras de los números de que tienen dos. En resumen:

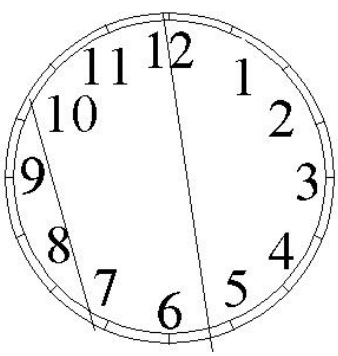
- Por un lado: 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 =45
- Por otro: 1 + 0 + 1 + 1 + 1 +2 = 6
- En total: 45 + 6 = 51

La suma total es múltiplo de 3, lo cuál es tranquilizador ya que queremos conseguir tres partes de suma idéntica. Como la tercera parte de 51 es 17, en realidad habrá que conseguir trozos tales que la suma de sus números sea 17.

Hagamos algunos intentos. Si empezamos a cortar a partir de la 1, con los números del 1 al 5 sumo 15 y si añado el 6 ya llego hasta 21. Además, por el otro lado también tengo problemas: las cifras de las horas de 10 a 12 suman 6, con el 9, 15, pero ya añadiendo el 8, nos excedemos demasiado.

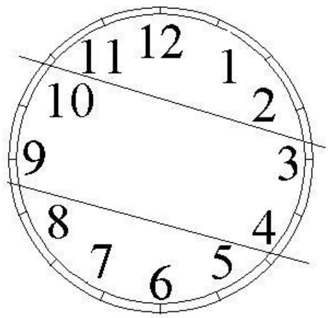
Una de las claves, uno de las señales que nos van a permitir "pasar el puente", es darnos cuenta que 8 + 9 = 17, es decir, ambos pueden ser un único trozo. Ahora bien, ¿por dónde hago los otros dos cortes?

Una posibilidad sería realizar cortes más o menos horizontales pero las cifras superiores suman poco y las inferiores demasiado, por lo que habrá que realizar cortes que combinen horas inferiores y superiores. 7 y 6 suman 13 por lo que tendríamos que añadir cifras que sumaran un total de 4. Con el 10 y el 11 añadimos 3 más. ¿Y el 1 que nos falta? Lo obtenemos partiendo el 12 por la mitad, tal y como se muestra en el dibujo.



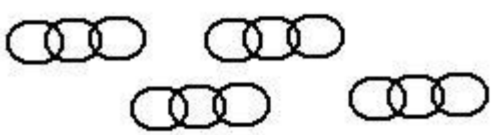
Sólo nos queda comprobar que, en el trozo restante, las cifras también suman lo buscado (2 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 17) y ya está terminado el problema.

Una confesión: hacía tiempo que no resolvía este problema y al principio interpreté que se pedía que la suma de los *números* (no de las *cifras*), fuera la misma. Los números del 1 al 12 suman 78 (6 parejas de valor 13, gracias, Gauss) y, ¡sí!, sí que se pueden obtener 3 trozos de suma 26, que es la tercera parte de 78. Los trozos serían los que vemos en el dibujo.

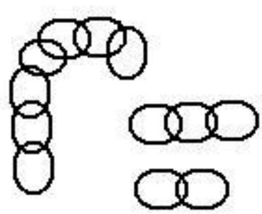


Afortunadamente, aunque mi cerebro no reparó en la (por otro lado, fundamental) diferencia entre *número* y *cifra*, mi memoria si guardaba una "foto" de la solución en la que el 12 aparecía dividido en dos trozos, lo cuál "activó mis alarmas" y permitió que descubriera mi error.

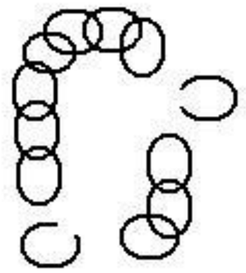
Solución al problema 29: Si abrimos un eslabón de cada una de las cuatro cadenas, podremos enganchar la primera con la segunda, la segunda con la tercera, la tercera con la cuarta y cerrar el círculo uniendo el extremo de la cuarta con el principio de la primera.



Por tanto el problema se puede resolver abriendo cuatro eslabones. ¿Será posible con menos "roturas"? Si abrimos un solo eslabón, sólo nos sirve para enganchar su cadena con la siguiente, salvo que lo separemos de su trozo original y lo utilicemos para enlazar dos cadenas de tres eslabones.



Nos quedarían dos trozos pequeños, uno de dos eslabones y otro de tres. Si los unimos entre sí (en una cadena de cinco) y los unimos a la de siete eslabones, llegaríamos también a los cuatro cortes. ¿Qué otra alternativa nos queda? Pues ya que estamos "destrozando" una de las cadenas podemos seguir haciéndolo y separar los dos eslabones que le quedan. Esos dos eslabones servirán para unir las cadenas de siete y tres y formar así la de doce eslabones con sólo tres roturas.



Solución al problema 30: Es evidente que si lo que quisiéramos fuera realizar el pago de un eslabón cada día bastaría realizar cortes en los eslabones intermedios, de forma que conseguiríamos tener los siete eslabones sueltos.

¿Qué alternativa tenemos? Al igual que hacemos con el dinero, podemos tener cadenas de "distinto valor", es decir, no es necesario que el posadero reciba cada día un nuevo eslabón sino que tenga en su poder siempre tantos eslabones como días lleva el caminante en su posada.

Lógicamente, para que este planteamiento merezca la pena, el número de cortes que realicemos debe ser menor de tres (que es el de la solución que ya tenemos). Parece evidente que hay que separar un eslabón para el primer día. Podría ser de un extremo pero así "tendríamos poco suelto" para nuestro pago, ¿Por dónde cortarlo entonces?

Podemos intentar que al separar el eslabón también nos facilite el pago del segundo día. ¿Cómo? Separando otro eslabón suelto o, mejor aún, un trozo de dos, como en la figura, cortando el tercer eslabón.

Vamos a comprobar que esta es la mejor opción ya que ¡no necesitamos más cortes! Este sería el procedimiento de los pagos.

Día	Forma de pago
1	Entrega un eslabón
2	Cambia el eslabón por la cadena de dos.
3	Añade el eslabón a la cadena de dos
4	Cambia lo que tenía por la de cuatro
5	Añade un eslabón a la de cuatro
6	Cambia el eslabón por la de dos
7	Añade finalmente el eslabón

Solución al problema 31: Como en el ejercicio anterior la clave está en elegir las “monedas de distinto valor” necesarias para conseguir todas las longitudes de 1 a 31.

Si empezamos por el primer día, es evidente que necesitamos un trozo de 1 cm. Para el segundo podríamos añadir otro igual, pero es más rentable usar uno de 2 cm (de 3 cm ya no, ya que entonces no tendríamos para el segundo día). Combinándolos tenemos para el tercer día. Para el cuarto ya no, por lo que elaboramos uno de 4, que combinándolos con los más pequeños, nos permitiría llegar hasta el 7.

Siguiendo el mismo razonamiento, cortaríamos uno de 8 cm, que, en combinación con los demás sería útil hasta el día 15. Y con la pieza sobrante de 16 cm podríamos realizar las otras combinaciones, ya que los demás trozos suman los 15 cm necesarios para llegar a 31 cm.

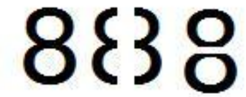
Como se ve en el esquema, el número de cortes necesario sería de cuatro, que daría lugar a los cinco trozos mencionados: 1, 2, 4, 8 y 16 cm., respectivamente.

Por cierto, que algún lector se habrá dado cuenta de que la longitud de los trozos son las distintas potencias de dos. De hecho, si escribiéramos el número en binario, nos indicaría *qué trozos habría que coger*. Por ejemplo 13 en binario (con 5 cifras) es 01101 por lo que de mayor a menor habría que coger el segundo trozo (8), el tercero (4) y el último (1).

Solución al problema 32: vamos a suponer que, al menos una de las "dos mitades" es la aritmética, es decir, el resultado de dividir un número entre 2. Si es así, ya tenemos dos "sospechosos": 12 y 14.

Para elegir al "culpable" debemos plantearnos de qué otra forma podemos considerar la mitad del número. Enseguida debe venir la idea de la mitad como cada porción que obtenemos al cortar algo en dos partes iguales. ¿Y cómo podemos partir un número?

Una forma es trazar una línea que divida el propio símbolo del número en dos mitades. Así, la mitad de 8 puede ser 0 o 3 (y no sólo 4, como probablemente pensabas)



Ahora bien, un rápido repaso a nuestros sospechosos nos permite comprobar que su "mitad" no es ninguno de los números buscados. Salvo que los expresemos de otra manera... ¡En números romanos!

Si "llevamos al laboratorio" la expresión de 12 y 14 en número romanos (respectivamente, XII y XIV,), el XIV no resiste las pruebas pero al hallar la mitad de XII… ¡obtenemos 7 en números romanos!

Solución al problema 33: El hecho de que las cifras de 4761 sumen 18 (múltiplo de 9) implica que cualquier reorganización de sus cifras dé lugar a otro múltiplo de 9 (pues sus cifras seguirán sumando 18). Como el padre de la protagonista dice que "los coloque formando un número de cuatro cifras" no hay más remedio que *ponerlos todos*, con lo que la única opción es ponerlos *de forma diferente*.

¿Cómo? Girándolos. Y la única cifra que se convierte en otra al darle la vuelta es el 6, con lo que los colocaría, por ejemplo (valdría cualquier otro orden de esas cifras), como 4791, que, dado que sus cifras suman 21, ya no es múltiplo de 9.

Solución al problema 34: Dado que sólo podemos recolocar los números y que, reorganizándolos, no hay ninguna igualdad posible, habrá que plantearse otras estrategias. Si ya has resuelto el problema anterior, dispones de una de las armas secretas: un 6 se recoloca como un 9, con lo que podríamos convertir la igualdad en:

$$79 = 24$$

Si probamos con las distintas organizaciones de las cifras, hay una que debería "encender algunas alertas":

$$72=49$$

Dado que el 49 es el cuadrado de 7, sólo nos queda elevar un poco el 2 para que se convierta en un exponente y dé lugar a una igualdad correcta.

$$7^2=49$$

Solución al problema 35: Esta igualdad podría ser cierta si en lugar de 1 el resultado fuera –1, es decir, si cambiáramos de sitio los dos números de la resta. Dado que nos piden resolverlo *con un solo movimiento*, parece claro que sólo podríamos mover una cifra.

Aunque hay un pequeño atajo, "si Mahoma no va a la montaña, la montaña irá a Mahoma"... Dado que no podemos mover los números que forman la resta, movamos la propia resta. ¿Cómo? Permutando el signo de la resta y el signo igual sin más que mover uno de los dos trazos que forman el igual (¿estamos de acuerdo en que es "un solo movimiento"?), de forma que obtenemos

$$101=102-1$$

Si esperabas un "truco con las cifras", tal vez este movimiento de los signos te deje poco satisfecho. Pero hay otra opción, que debería habernos sugerido la solución del problema anterior. 101-100 sí que es igual a 1, y 100, además, es... ¡10^2! , con lo que también es válido:

$$101-10^2=1$$

Solución al problema 36:

IIII = I

Dado que entre los dos hay en total un número impar de cerillas, es evidente que no basta con recolocarlas, habrá que aprovechar el movimiento al que tenemos derecho para realizar algún tipo de transformación. Como la cantidad es bastante mayor a la izquierda de la igualdad habrá que hacer lo posible por disminuir su valor.

Las operaciones que provocan la disminución de un valor son la resta y la división. Inclinando una cerilla obtenemos el signo de división (/) pero ni II/I=I ni I/II=I. Más suerte tenemos con la resta ya que, girando una de las cerillas, obtenemos:

II - I = I

XII=I

La presencia de la cifra 10 (X) en un lado de la igualdad ya nos indica que no va a ser fácil, ya que no parece posible conseguir un valor de esa magnitud en el otro lado de la igualdad, *al menos en números romanos*.

Si pasamos una de las cerillas al otro lado, obtenemos la siguiente igualdad

XI=II

En la que figura el número 11 en dos sistemas de numeración diferentes.

VI=II

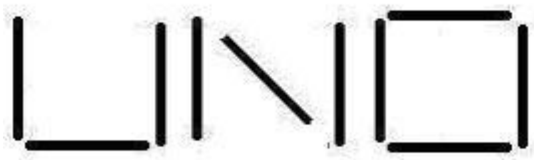
Visto el apartado anterior podríamos tener la tentación de “reeditarlo” moviendo las cerillas que forman la V y apañar una especie de X un tanto deformada. Pero hay una solución más elegante.

La clave es darse cuenta de que, si probamos a utilizar las cuatro operaciones básicas, la limitación a un solo movimiento apenas nos dejaría lugar a una resta o a una división, pero con ninguna de ellas se cumple la igualdad.

Pero, ¿no conocemos otras operaciones matemáticas?. Por supuesto que sí. Una es la potencia que no parece que pueda aplicarse a esta situación y otra es... la raíz cuadrada. Utilizando una de las cerillas de la derecha, podemos completar el signo de la raíz cuadrada para perfilar esta igualdad correcta:

$$\sqrt{I}=I$$

Solución al problema 37: Es imposible que al quitar cinco palillos quede un único palillo. Entonces a qué se refiere con que *quede uno*. Basta quitar cinco palillos estratégicamente situados y, ¿qué nos queda? ¡La palabra uno!



Solución al problema 38: Este problema desconcierta porque da la impresión de que uno *hace algo sin hacer nada*, ya que al parecer *no se cogen cerezas* de un cerezo donde *sí las había* y sin embargo *tampoco se dejan*. Porque además esos dos hechos (que *había cerezas* y que al final *no hay cerezas*) los señala expresamente el enunciado.

No es fácil mostrar un camino que nos lleve a "cruzar el puente" (es más un problema que requiere un golpe de inspiración). La cuestión reside en que en todo momento se habla de *cerezas*, en plural y todo funciona si se coge una *cereza* (por tanto no *cerezas*, en plural) y se deja otra *cereza* (y así no se dejan *cerezas*).

Por tanto, para que encajen todas las piezas, al principio había sólo dos cerezas (con lo que también se cumple que *había cerezas*).

Solución al problema 39: Hay varias versiones de este problema, sobre todo en lo que se refiere a los datos, aunque he elegido la que yo conocí primero. En esa versión, la aparición de dos cantidades, 12 y 144 (precisamente el cuadrado de 12), desconcierta ya que uno no sabe si está pagando un aumento de las dimensiones de algo. Porque de lo que no cabe duda es de que el aumento de los artículos (cada vez se *multiplica* por 12) es mucho mayor que el de los precios (cada vez se *añade* un euro).

Así, es evidente que no pagamos por unidad. La presencia del 12 hace pensar en alguna solución relacionada con docenas, pero no parecen salir las cuentas.

Pero ¿qué es lo que relaciona realmente 1, 12 y 144 con 1, 2 y 3, respectivamente? ¡Es el número de cifras de cada cantidad! Así pues, si compramos 1 o 12, no es una cantidad de nada sino que estamos comprando *físicamente* los números (¿recuerdas los números de metal del problema 33?) Cada número vale 1 € con lo que el 1 nos cuesta 1 €, para el 12 necesitamos dos, por lo que vale 2 €, y el 144 nos costará 3 €.

Solución al problema 40: Si uno ha resuelto problemas relacionados con series de números, sabe que siempre merece la pena comprobar algunas cosas: ¿crece (o decrece) siempre? Si lo hace, ¿es siempre de la misma forma? Si se alternan crecimientos y decrecimientos, ¿siguen también algún tipo de patrón?

0, 5, 4, 2, 9, 8, 6, 7, 3...

Observando esta serie, sí parece que existen algunas regularidades. Utilizando un lenguaje informal la serie sigue este patrón: *crece, decrece, decrece, crece, decrece, decrece, crece, decrece* (ahora le tocaría decrecer de nuevo que, por cierto, adelanto que sí que lo hace). Ahora bien esos crecimientos no son regulares, salvo por el hecho de que siempre la segunda “bajada” es de dos unidades.

La presencia del 0 encabezando la serie descarta que haya multiplicaciones y los descensos no parecen debidos a divisiones. ¿De qué se trata entonces? Hay dos indicios que nos pueden llevar a la solución. Uno es más fácil de detectar: no se repiten números y son todos números menores que 10. Es decir, es lo que llamamos *las cifras* y están todas menos el 1 (¿será el siguiente? Cumpliría el *crece, decrece, decrece*...)

El otro indicio lo hemos incluido en las indicaciones pues es menos obvio: se trata de leer la serie en voz alta. ¿Para qué? Para convertir una simple serie numérica en esto: *cero, cinco, cuatro, dos, nueve, ocho, seis, siete, tres…* ¡Están en orden alfabético!

Por tanto, son las cifras en orden alfabético y después de *tres* viene, efectivamente, *uno*, la única cifra que faltaba.

Indice